

به نام خدا



دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوراسگان
گروه عمران

تحلیل سازه ۲

روش پخش لنگر

روش پخش لنگر

روش نرمی (نیرو)

روش سختی

تحلیل سازه های نامعین

روش شیب-افت slope-deflection method

روش پخش لنگر moment-distribution method

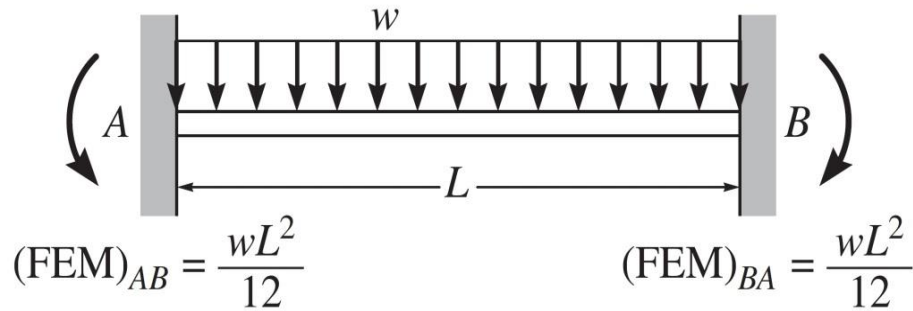
روش پخش لنگر moment-distribution method

قرارداد علامت در روش پخش لنگر

- ۱- لنگر موثر به انتهای عضو در صورتی مثبت است که در جهت عقربه های ساعت باشد
- ۲- θ زاویه دوران مماس بر منحنی تغییر شکل الاستیک در صورتی مثبت که نسبت به حالت اولیه در جهت عقربه های ساعت حرکت کند.
- ۳- در صورتی که زاویه دوران خط واصل بین دو انتهای منحنی تغییر شکل الاستیک نسبت به موقعیت اولیه در جهت عقربه های ساعت حرکت کند، آنگاه این زاویه مثبت است.

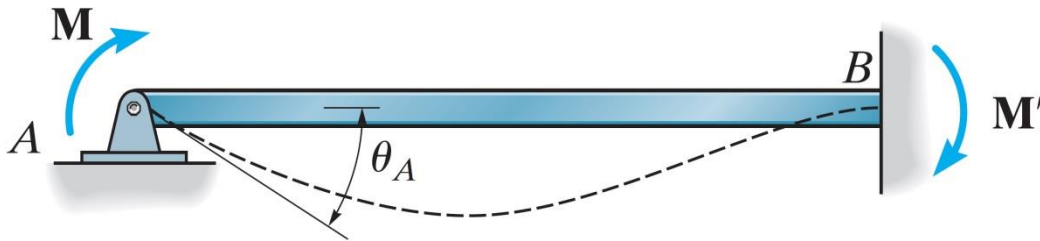
روش پخش لنگر

لنگرهای گیرداری انتها FEM



Member Stiffness Factor

ضریب سختی عضو



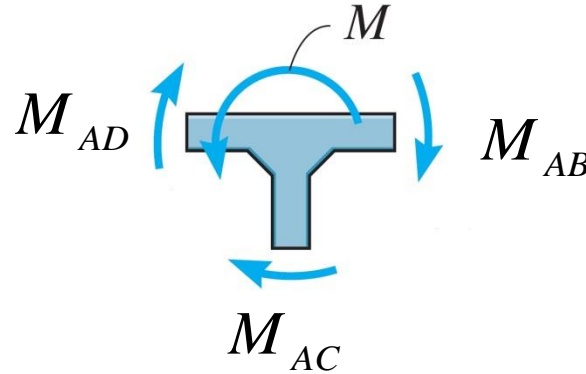
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - 0) + 0 = \frac{2EI}{L} (2 + 0) = \frac{4EI}{L} \quad \rightarrow \quad K = \frac{4EI}{L}$$

Member Relative-Stiffness Factor

ضریب سختی نسبی عضو

$$K_R = \frac{I}{L} \rightarrow K = 4E(K_R)$$

ضریب توزیع (DF) Distribution Factor



$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} = M$$

$$(K_{AB} + K_{AC} + K_{AD})\theta_A = M$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A) = K_{AB}\theta_A$$

$$M_{AC} = K_{AC}\theta_A$$

$$M_{AD} = K_{AD}\theta_A$$

$$\theta_A = \frac{M}{(K_{AB} + K_{AC} + K_{AD})} = \frac{M}{\sum K} = \frac{M}{4E \sum K_R}$$

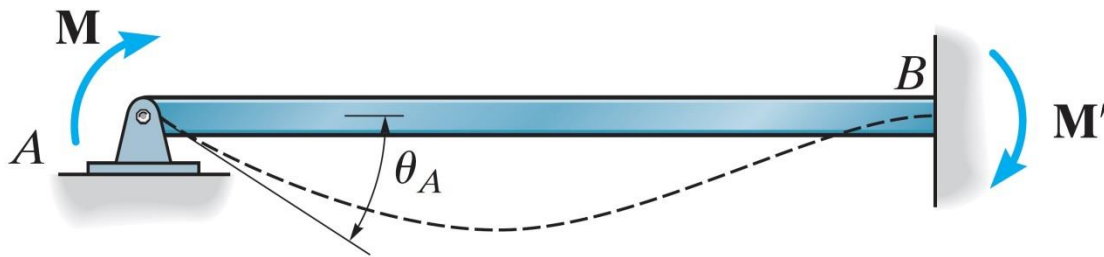
$$M_{ij} = \left(\frac{K_{ij}}{4E \sum K_R} \right) M = \left(\frac{4E(K_R)_{ij}}{4E \sum K_R} \right) M = \left(\frac{(K_R)_{ij}}{\sum K_R} \right) M$$

Distribution Factor (DF)

ضریب توزیع

$$DF_{ij} = \frac{(K_R)_{ij}}{\sum K_R}$$

ضریب انتقال (CO)

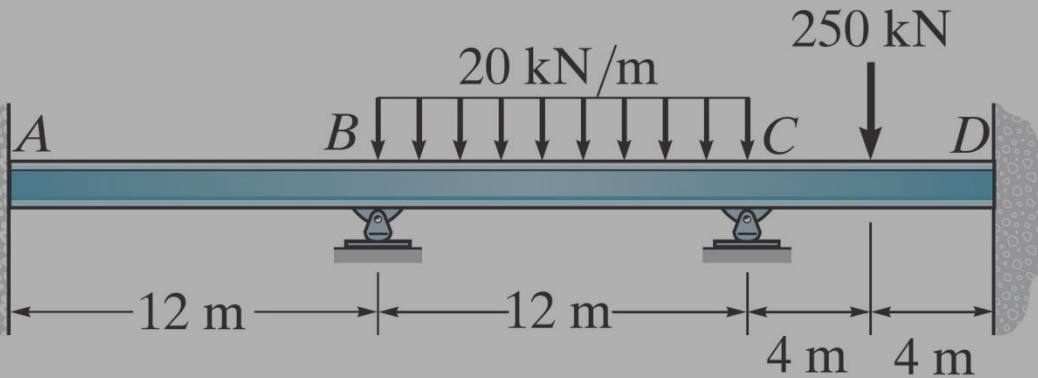


$$M_{BA} = C_{AB} \times M_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} (\theta_A) = \frac{1}{2} M_{AB} \rightarrow C_{AB} = \frac{1}{2}$$

روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر
برای تیرها



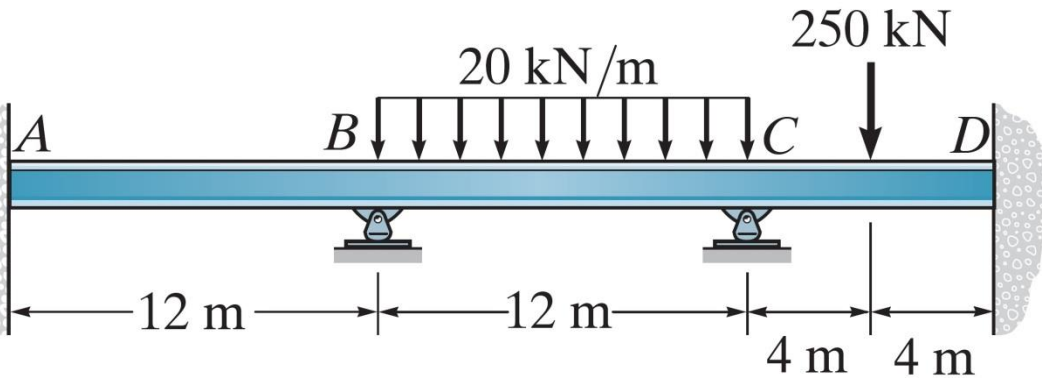
$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \quad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \quad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر
برای تیرها



$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-20(12)^2}{12} = -240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

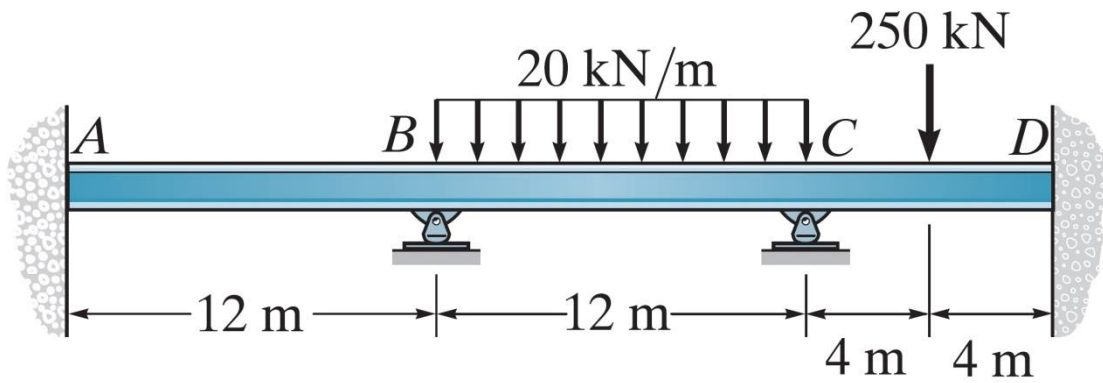
$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = \frac{-250(8)}{8} = -250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

روش پخش لنگر

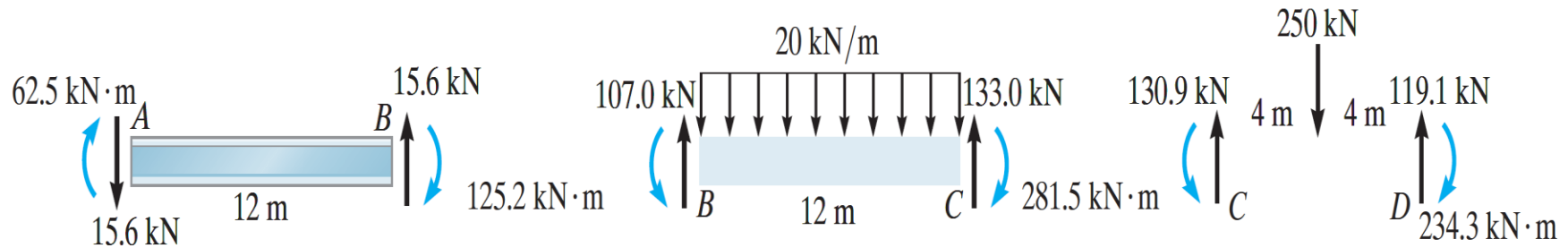
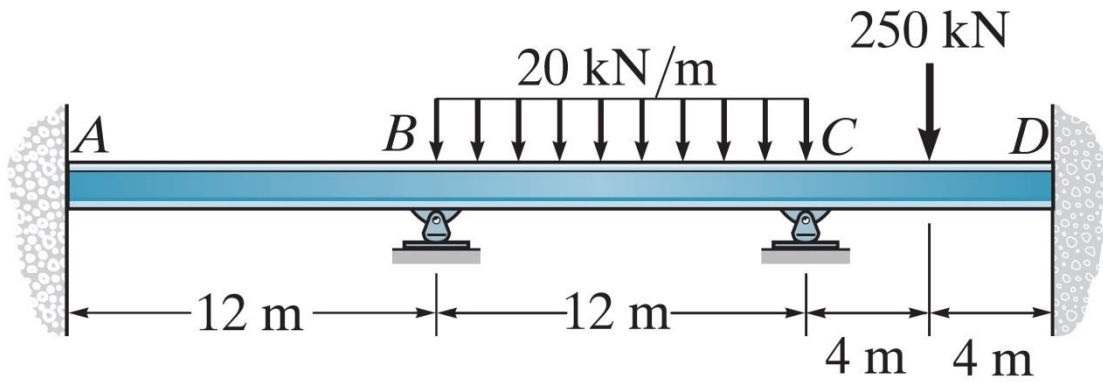
کاربرد روش پخش لنگر
برای تیرها



Joint	A	B		C		D	
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC	1
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0	2
FEM			-240	240	-250	250	3
Dist.		120	120	4	6		4
CO	60		2	60		3	5
Dist.		-1	-1	-24	-36		6
CO	-0.5		-12	-0.5		-18	7
Dist.		6	6	0.2	0.3		8
CO	3		0.1	3		0.2	9
Dist.		-0.05	-0.05	-1.2	-1.8		10
CO	-0.02		-0.6	-0.02		-0.9	11
Dist.		0.3	0.3	0.01	0.01		12
ΣM	62.5	125.2	-125.2	281.5	-281.5	234.3	13
							14

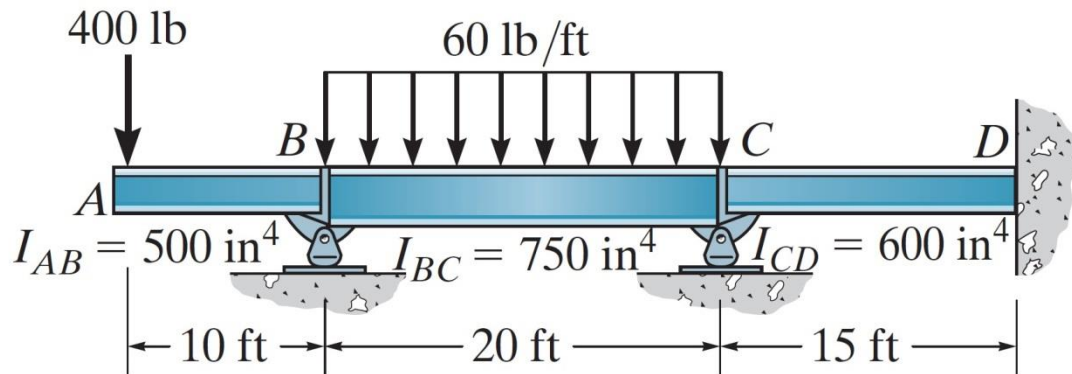
روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر
برای تیرها



روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر
برای تیرها



$$K_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E \quad K_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$DF_{BC} = 1 - (DF)_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$DF_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$DF_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$DF_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

$$(FEM)_{BA} = 400 \text{ lb}(10 \text{ ft}) = 4000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

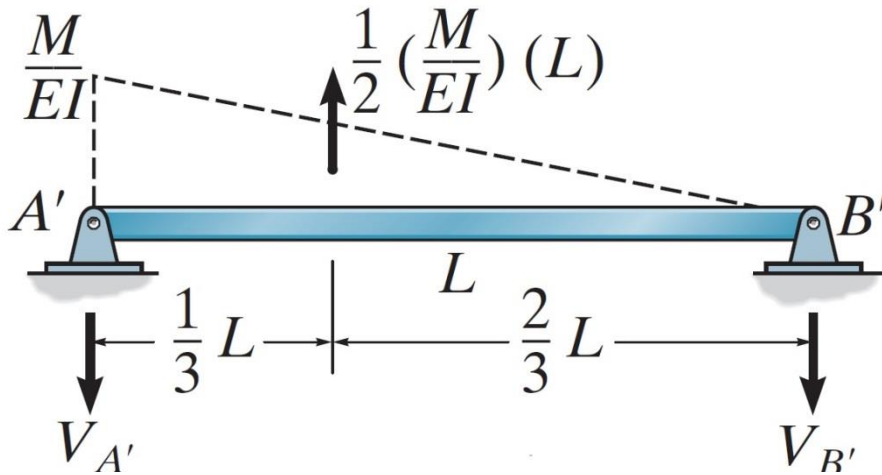
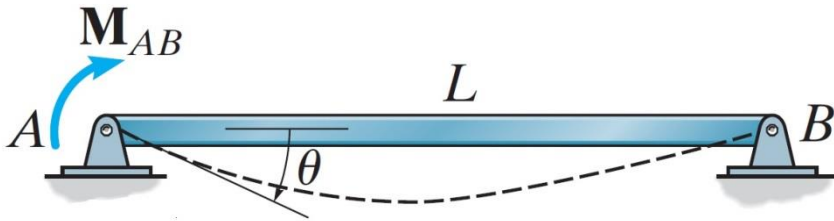
روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر
برای تیرها

Joint	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Member		<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	1	0.484	0.516	0
FEM	4000	-2000	2000		
Dist.		-2000	-968	-1032	
CO		-484	-1000		-516
Dist.		484	484	516	
CO		242	242		258
Dist.		-242	-117.1	-124.9	
CO		-58.6	-121		-62.4
Dist.		58.6	58.6	62.4	
CO		29.3	29.3		31.2
Dist.		-29.3	-14.2	-15.1	
CO		-7.1	-14.6		-7.6
Dist.		7.1	7.1	7.6	
CO		3.5	3.5		3.8
Dist.		-3.5	-1.7	-1.8	
CO		-0.8	-1.8		-0.9
Dist.		0.8	0.9	0.9	
CO		0.4	0.4		0.4
Dist.		-0.4	-0.2	-0.2	
CO		-0.1	-0.2		-0.1
Dist.		0.1	0.1	0.1	
ΣM	4000	-4000	587.1	-587.1	-293.6

روش پخش لنگر

اصلاح ضریب سختی

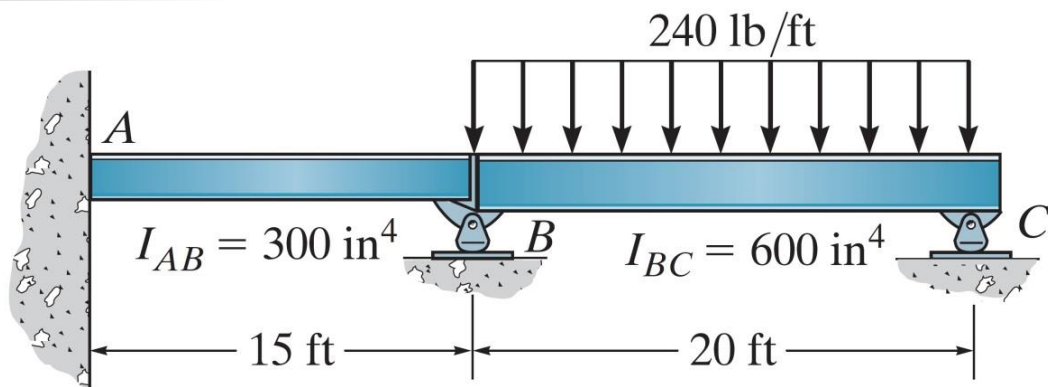


$$\downarrow + \sum M_{B'} = 0; \quad V'_A(L) - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \left(\frac{2}{3} L \right) = 0$$

$$V'_A = \theta = \frac{ML}{3EI}$$

or

$$M = \frac{3EI}{L} \theta \quad \longrightarrow \quad K = \frac{3EI}{L}$$



روش پخش لنگر

مثال برای کاربرد ضریب سختی
اصلاح شده

روش اول: بدون استفاده از سختی اصلاح شده

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(300)}{15} = 80E$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(600)}{20} = 120E$$

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$

$$DF_{BC} = \frac{120E}{120E + 80E} = 0.6$$

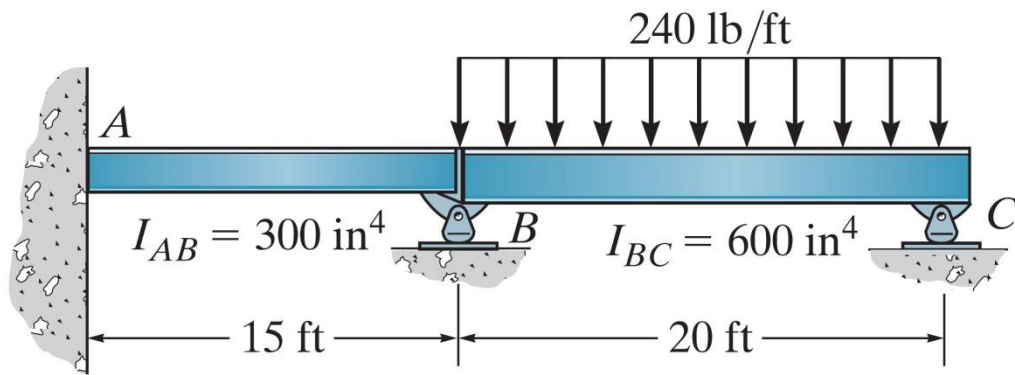
$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 120E} = 0.4$$

$$DF_{CB} = \frac{120E}{120E} = 1$$

$$(FEM)_{BC} = \frac{-WL^2}{12} = -8000,$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{WL^2}{12} = 8000$$

joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4	0.6	1
FEM	0	0	-8000	8000
Dist	0	3200	4800	-8000
Co	1600	0	-4000	2400
Dist	0	1600	2400	-2400
Co	800	0	-1200	1200
Dist	0	480	720	-1200
Co	240	0	-600	360
Dist	0	240	360	-360
↓	↓	↓	↓	↓
Co	0.41	0	-0.6075	0.6075
Dist	0	0.243	0.3645	-0.6075
Σ	2823.6	5647.2	-5647.2	0



روش پخش لنگر

مثال برای کاربرد ضریب سختی
اصلاح شده

روش دوم: با استفاده از سختی اصلاح شده

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(300)}{15} = 80E$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3E(600)}{20} = 90E$$

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$

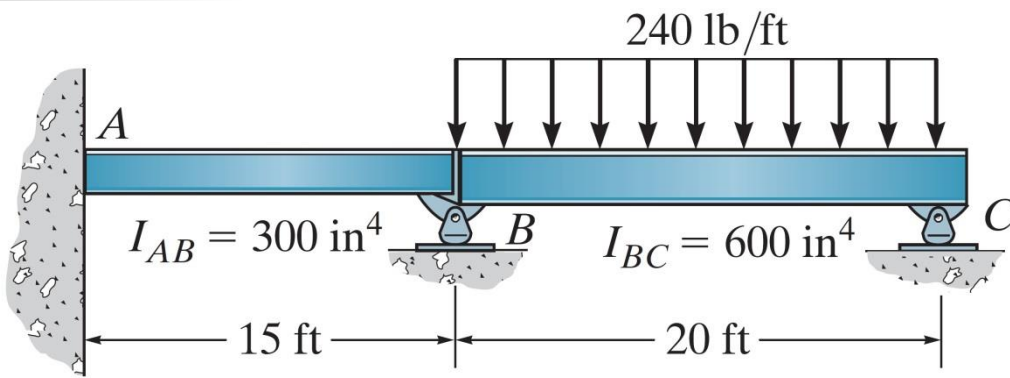
$$DF_{BC} = \frac{90E}{80E + 90E} = 0.5294$$

$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 90E} = 0.4706$$

$$DF_{CB} = \frac{90E}{90E} = 1$$

روش پخش لنگر

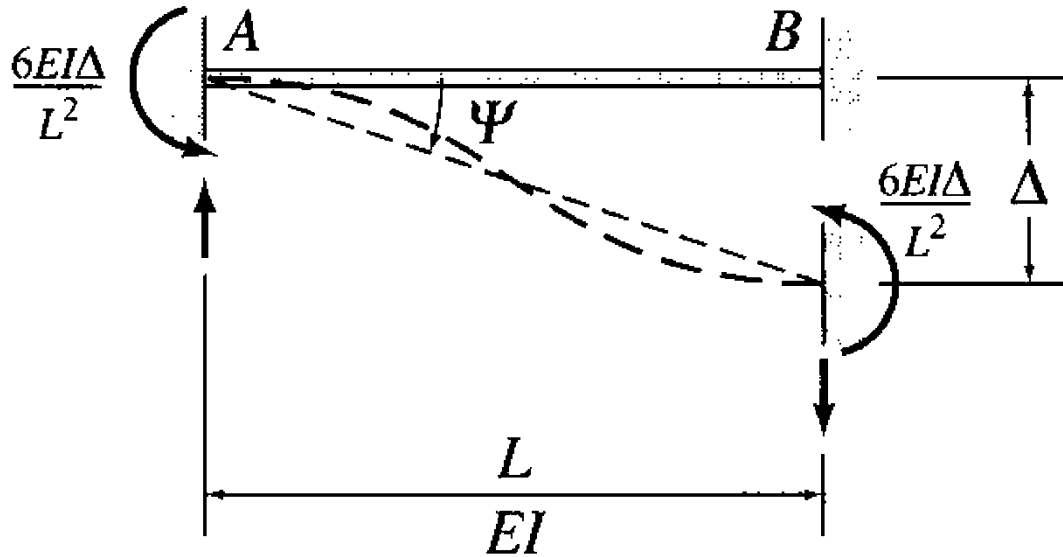
مثال برای کاربرد
ضریب سختی اصلاح شده



$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = \frac{-240(20)^2}{8} = -12\,000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

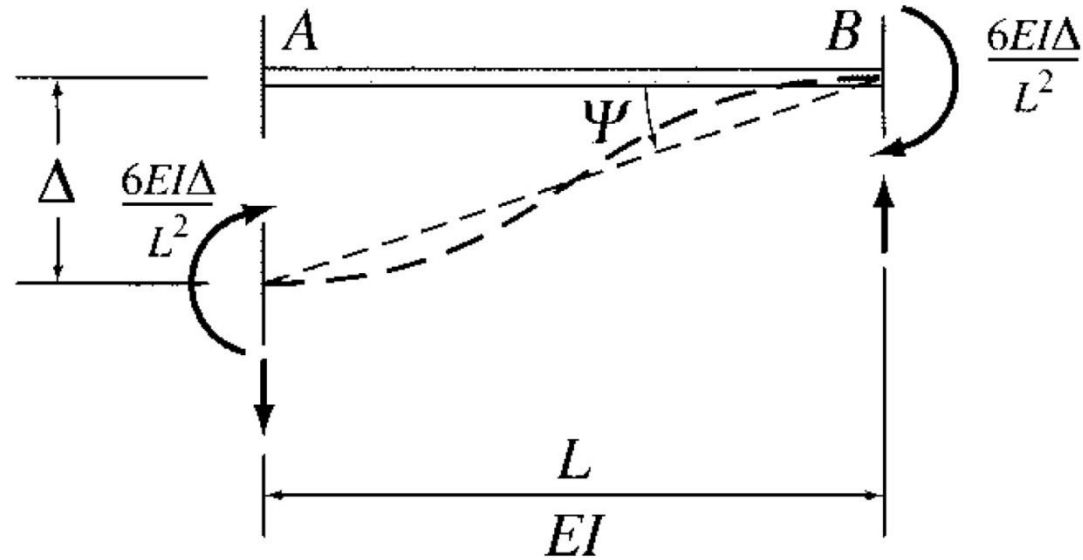
Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM			-12 000	
Dist.		5647.2	6352.8	
CO	2823.6			
ΣM	2823.6	5647.2	-5647.2	0

تأثیر نشست تکیه گاه



$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{2EI}{L} \left(0 + 0 - \frac{3\Delta}{L} \right) = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$

تأثیر نشست تکیه گاه



$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{2EI}{L} \left[0 + 0 - \frac{3(-\Delta)}{L} \right] = \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

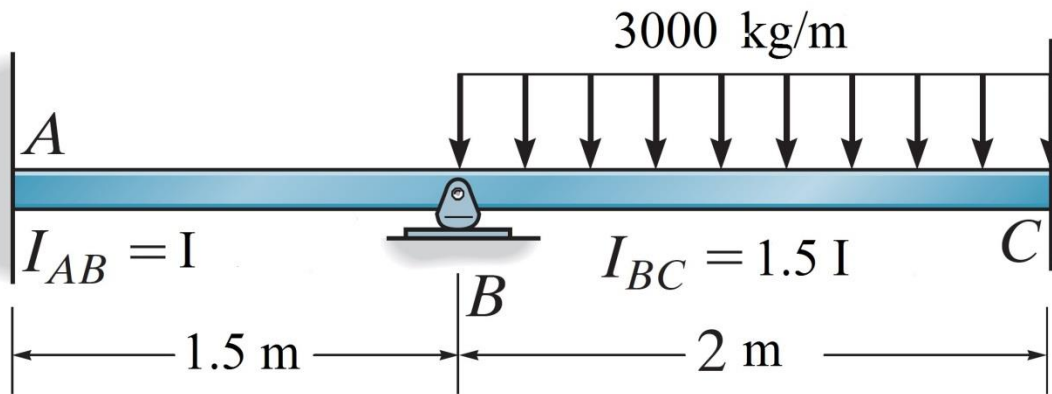
روش پخش لنگر

مثال برای تاثیر نشست تکیه گاه

$$I = 3000 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta_B = 2 \text{ cm}$$



لنگرهای گیرداری ناشی از بار خارجی

$$M_{AB} = M_{BA} = 0 \quad M_{BC} = \frac{-WL^2}{12} = -1000 \text{ kg.m} \quad M_{CB} = \frac{WL^2}{12} = 1000 \text{ kg.m}$$

لنگرهای گیرداری ناشی از نشست تکیه گاه B

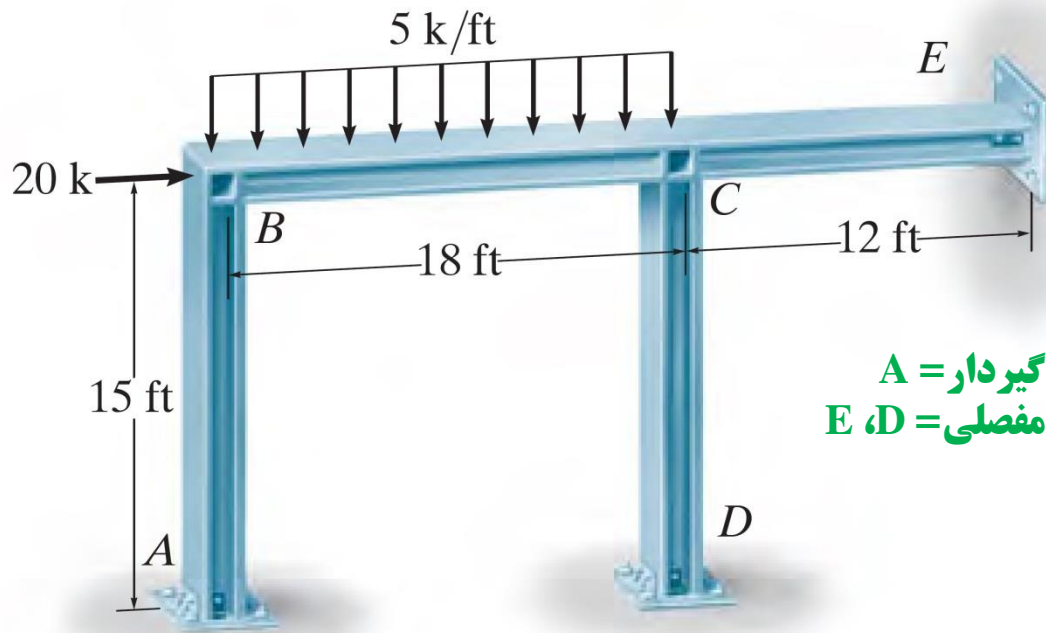
$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{-6EI}{L^2} \Delta = -33.6 \text{ Ton.m}$$

$$M_{CB} = M_{BC} = \frac{6EI}{L^2} \Delta = 18.9 \text{ Ton.m}$$

روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر برای
قاب بدون حرکت جانبی

به منظور بکار بردن روش پخش
لنگر برای قاب بدون حرکت جانبی
از روندی مشابه با آنچه برای تیر
تشریح شد، استفاده می گردد.



A = گیردار
E, D = مفصلی

$$K_{AB} = \frac{4EI}{15} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{18} \quad K_{CD} = \frac{3EI}{15} \quad K_{CE} = \frac{3EI}{12}$$

$$(\text{FEM})_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-5(18)^2}{12} = -135 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{5(18)^2}{12} = 135 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$DF_{AB} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{4EI/15}{4EI/15 + 4EI/18} = 0.545$$

$$DF_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/18}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.330$$

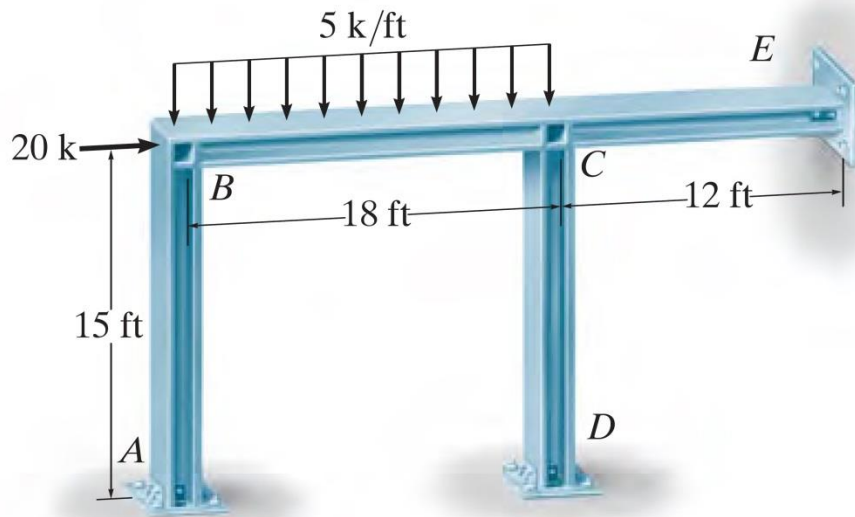
$$DF_{CD} = \frac{3EI/15}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.298$$

$$DF_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

$$DF_{DC} = 1 \quad DF_{EC} = 1$$

روش پخش لنگر

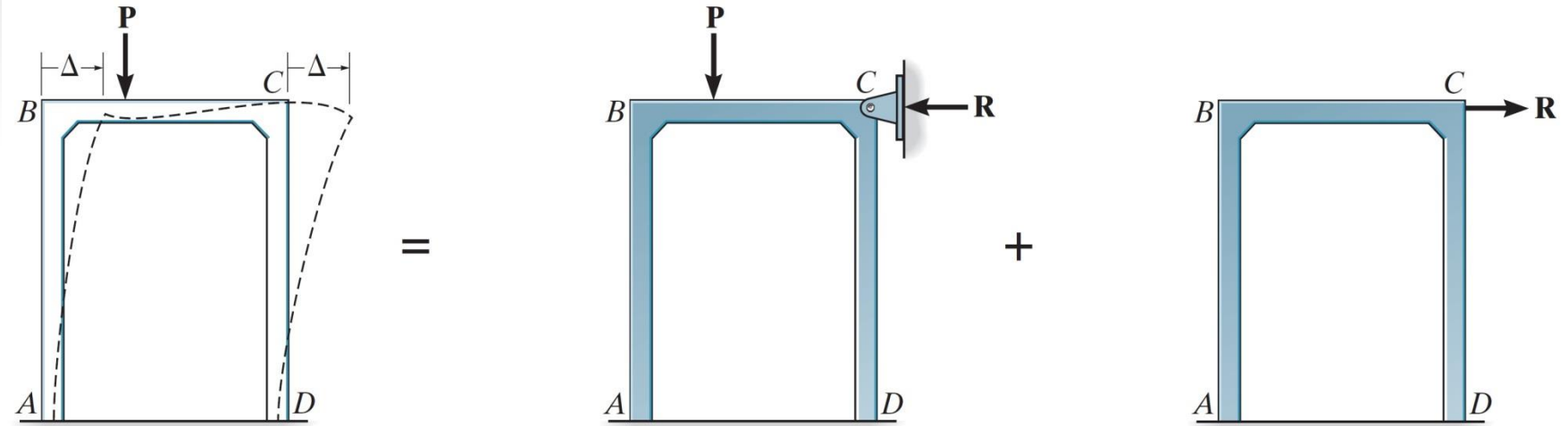
کاربرد روش پخش لنگر برای
قاب بدون حرکت جانبی



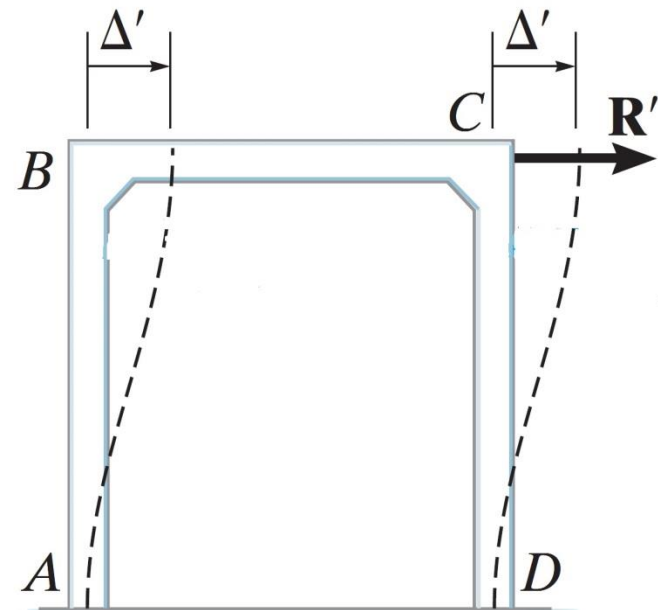
Joint	A	B		C			D	E
Member	AB	BA	BC	CB	CD	CE	DC	EC
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM Dist.		73.6	-135	135				
CO Dist.	36.8		61.4	-44.6	-40.2	-50.2		
CO Dist.		12.2	-22.3	30.7				
CO Dist.	6.1		10.1	-10.1	-9.1	-11.5		
CO Dist.		2.8	-5.1	5.1				
CO Dist.	1.4		2.3	-1.7	-1.5	-1.9		
CO Dist.		0.4	-0.8	1.2				
CO Dist.	0.2		0.4	-0.4	-0.4	-0.4		
CO Dist.		0.1	-0.2	0.2				
CO Dist.			0.1	-0.1	0.0	-0.1		
ΣM	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

کاربرد روش پخش لنگر برای
قاب با حرکت جانبی

روش پخش لنگر



$$M = M^{\circ} + M'$$

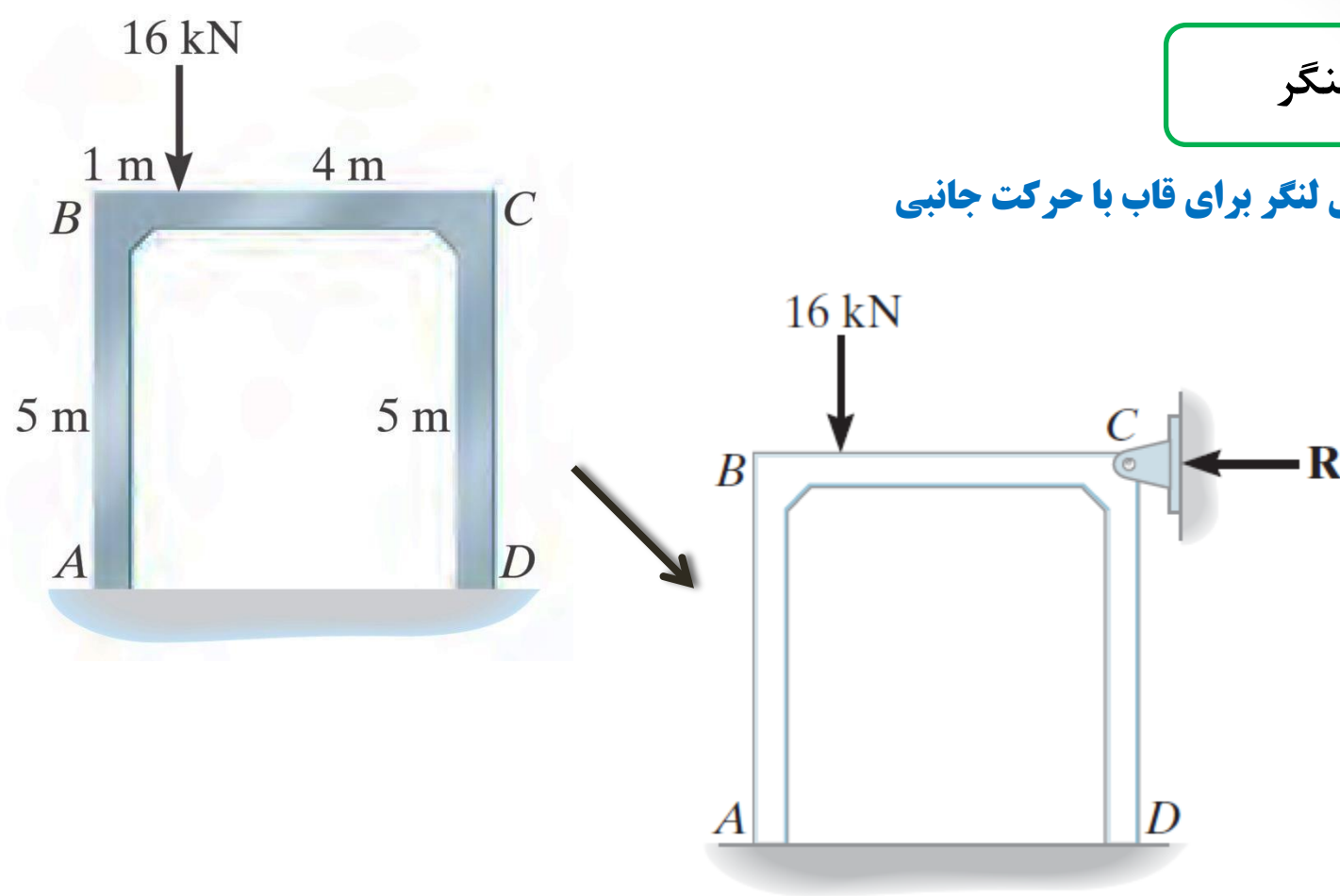


$$\alpha = \frac{R}{R'}$$

$$M = M^{\circ} + \alpha M'$$

روش پخش لنگر

مثال کاربرد روش پخش لنگر برای قاب با حرکت جانبی



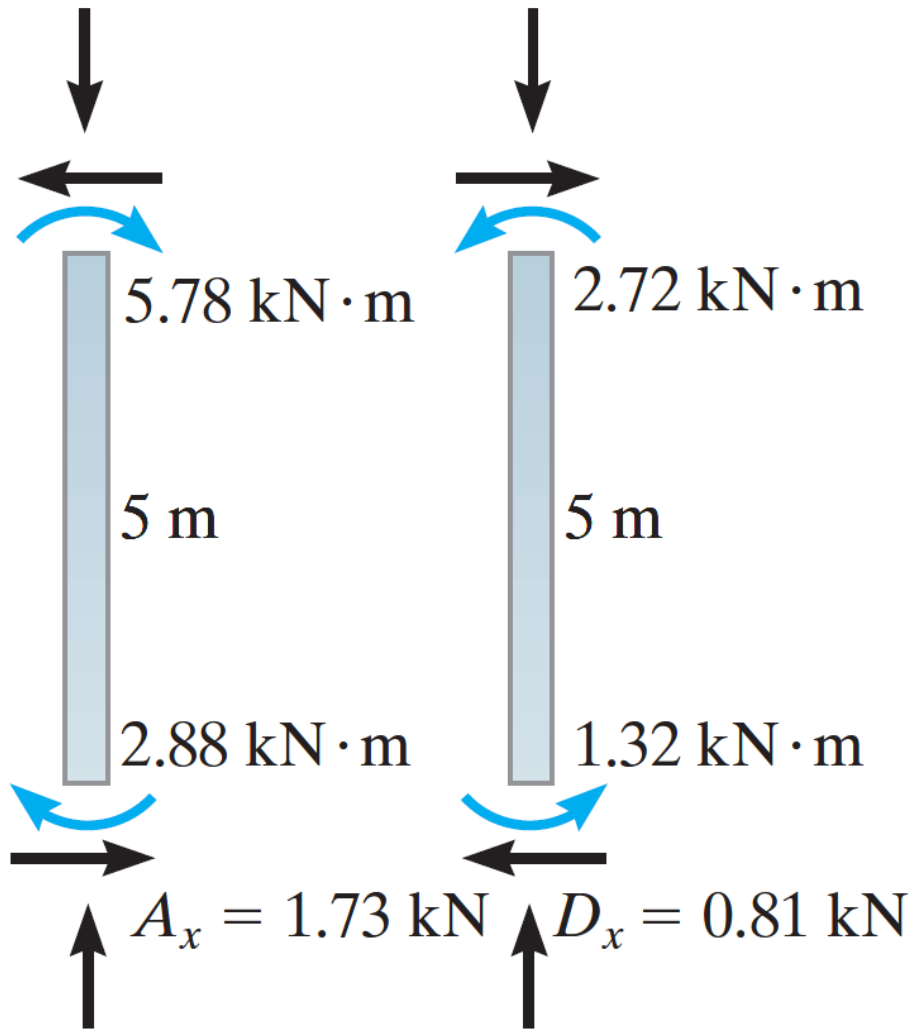
$$(FEM)_{BC} = -\frac{16(4)^2(1)}{(5)^2} = -10.24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{16(1)^2(4)}{(5)^2} = 2.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

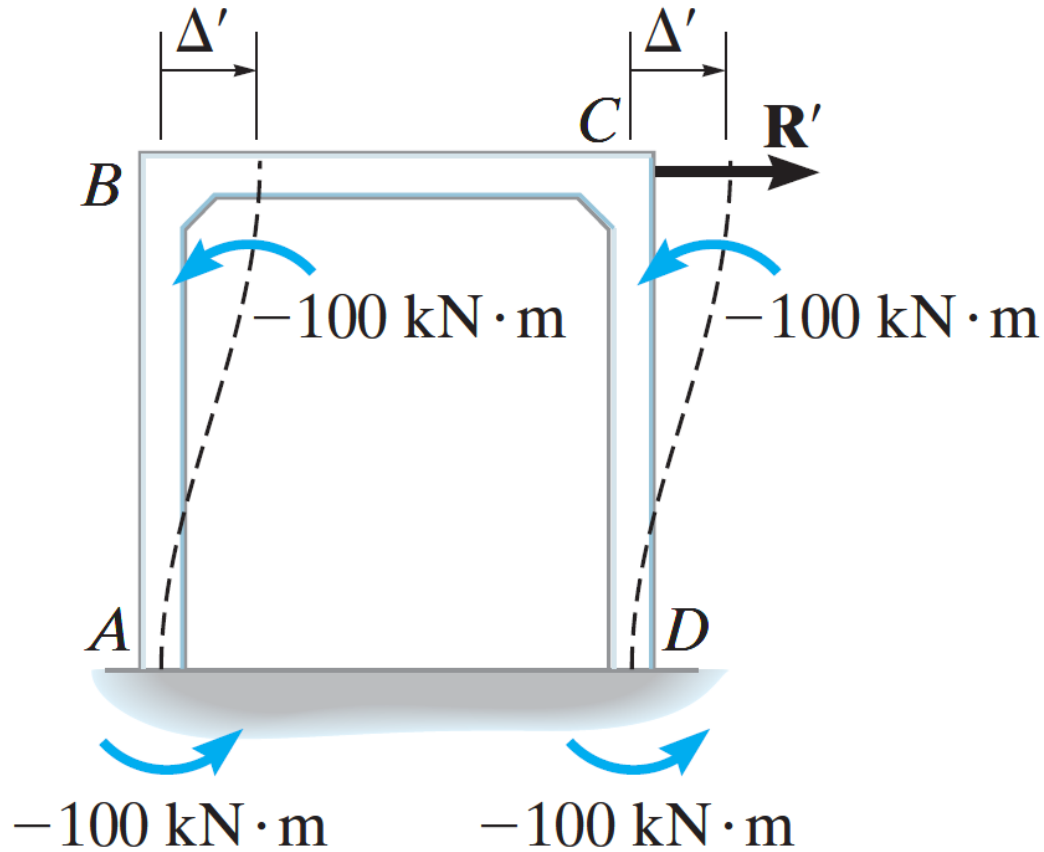
مرحله اول: محاسبه لنگرها در وضعیت اعمال قید فرضی

Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Member	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM Dist.			-10.24	2.56		
CO Dist.	2.56	5.12	5.12	-1.28	-1.28	-0.64
CO Dist.	0.16	0.32	0.32	-1.28	-1.28	-0.64
CO Dist.	0.16	0.32	0.32	-0.08	-0.08	-0.04
CO Dist.	0.16	0.02	0.02	-0.08	-0.08	-0.04
ΣM	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72	-1.32

مرحله دوم: محاسبه نیروی مجهول R



$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 1.73 \text{ kN} - 0.81 \text{ kN} = 0.92 \text{ kN}$$

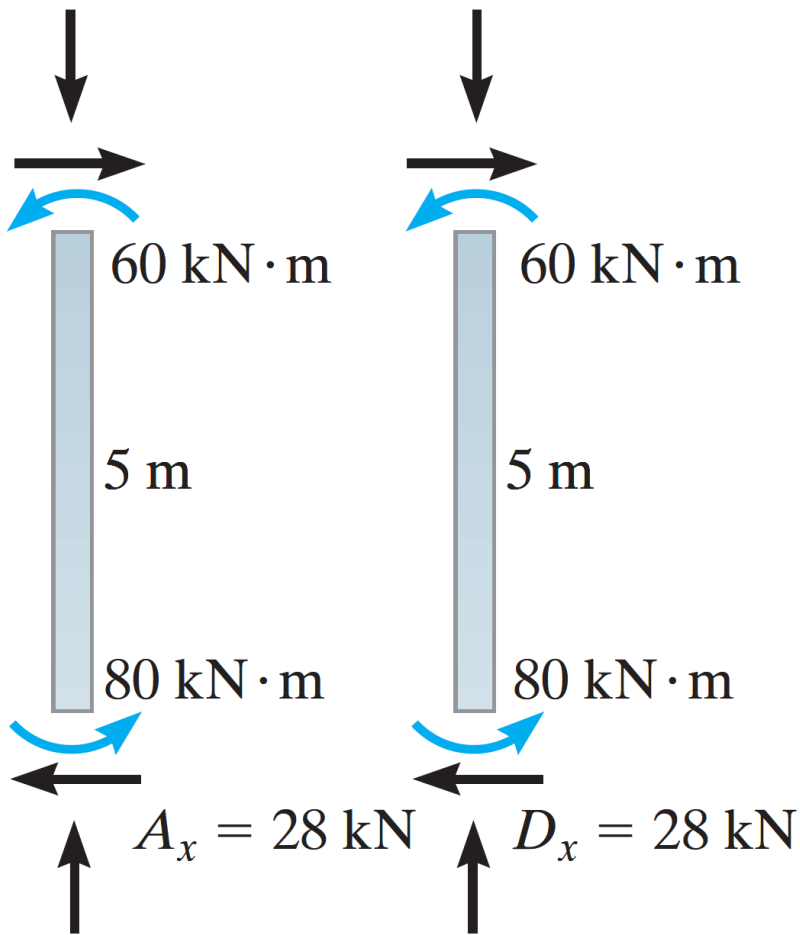


$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = -100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

مرحله چهارم: تعیین لنگرهای ناشی از جابجایی فرضی Δ'

Joint	A		B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	
FEM	-100	-100			-100	-100	
Dist.		50	50	50	50		
CO	25		25	25		25	
Dist.		-12.5	-12.5	-12.5	-12.5		
CO	-6.25		-6.25	-6.25		-6.25	
Dist.		3.125	3.125	3.125	3.125		
CO	1.56		1.56	1.56		1.56	
Dist.		-0.78	-0.78	-0.78	-0.78		
CO	-0.39		-0.39	-0.39		-0.39	
Dist.		0.195	0.195	0.195	0.195		
ΣM	-80.00	-60.00	60.00	60.00	-60.00	-80.00	



$$\sum F_x = 0;$$

$$R' = 28 + 28 = 56.0 \text{ kN}$$

$$M_{AB} = 2.88 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = 1.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 5.78 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = 4.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -5.78 + \frac{0.92}{56.0}(60) = -4.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

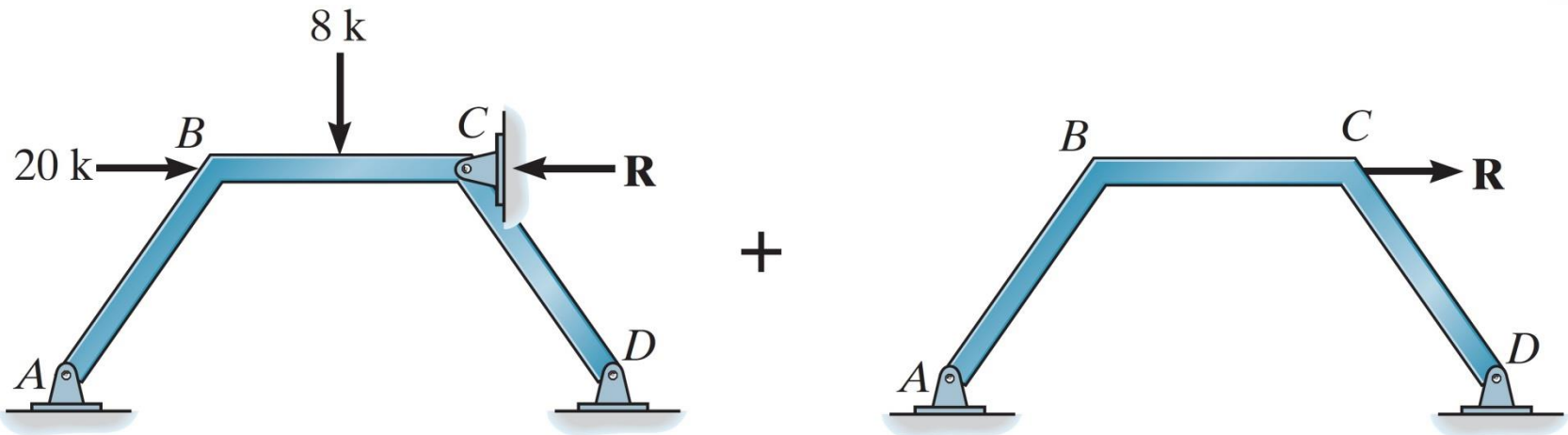
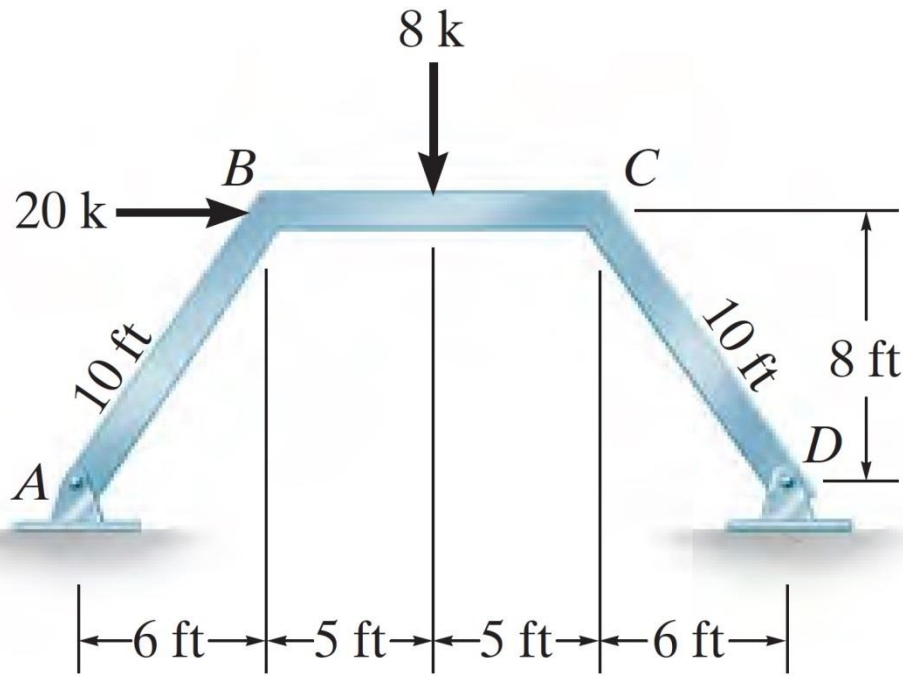
$$M_{CB} = 2.72 + \frac{0.92}{56.0}(60) = 3.71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = -2.72 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = -3.71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

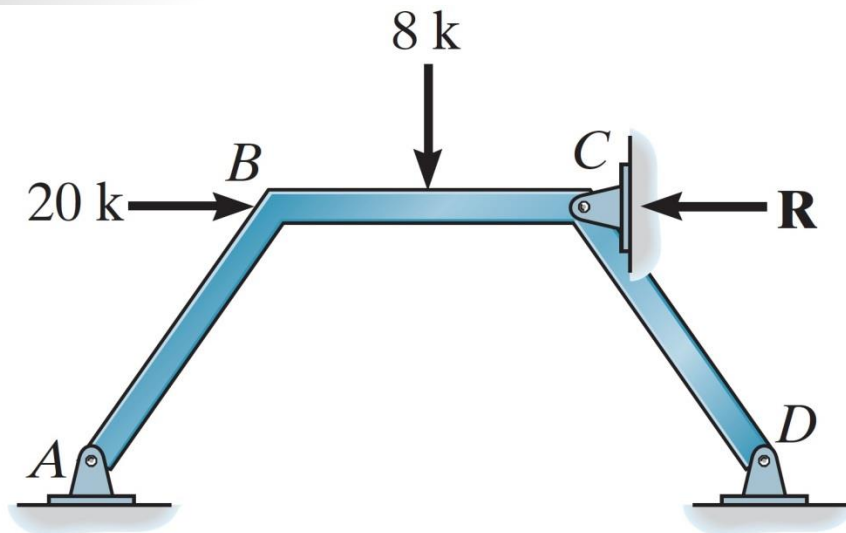
$$M_{DC} = -1.32 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = -2.63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

روش پخش لنگر

قاب یک درجه آزادی با اعضای مایل



روش پخش لنگر



قاب یک درجه آزادی با اعضای مایل

$$(FEM)_{BC} = -\frac{8(10)}{8} = -10 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{8(10)}{8} = 10 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM			-10	10		
Dist.		4.29	5.71	-5.71	-4.29	
CO			-2.86	2.86		
Dist.		1.23	1.63	-1.63	-1.23	
CO			-0.82	0.82		
Dist.		0.35	0.47	-0.47	-0.35	
CO			-0.24	0.24		
Dist.		0.10	0.13	-0.13	-0.10	
ΣM	0	5.97	-5.97	5.97	-5.97	0

$$\downarrow + \sum M_B = 0;$$

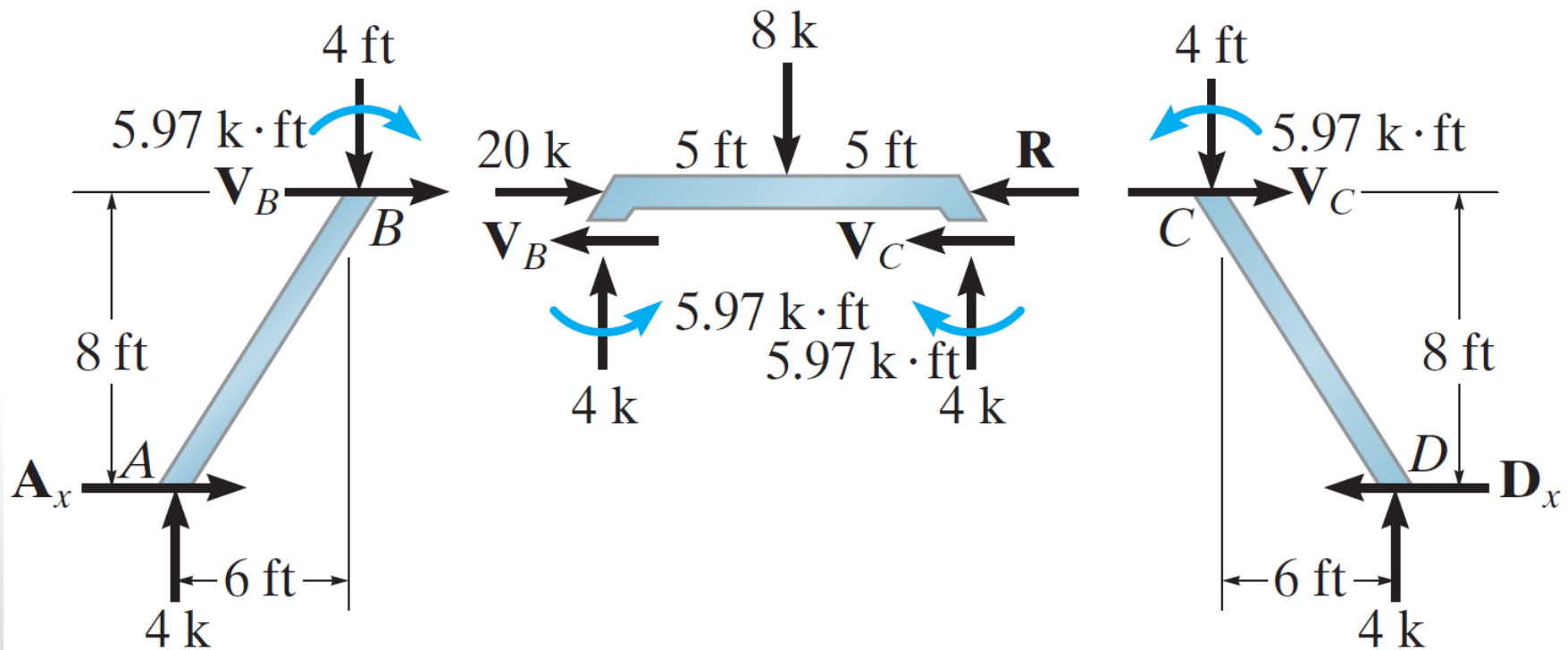
$$-5.97 + A_x(8) - 4(6) = 0 \quad A_x = 3.75 \text{ k}$$

$$\downarrow + \sum M_C = 0;$$

$$5.97 - D_x(8) + 4(6) = 0 \quad D_x = 3.75 \text{ k}$$

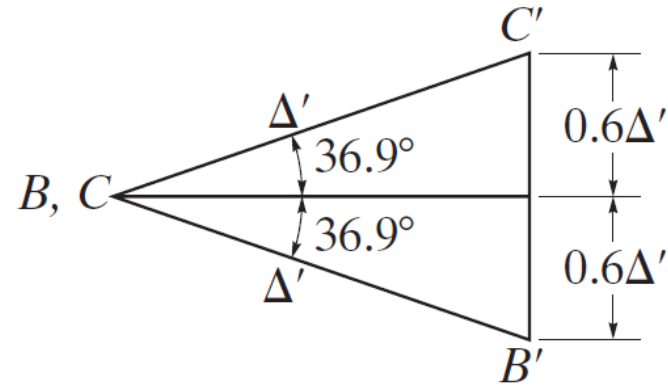
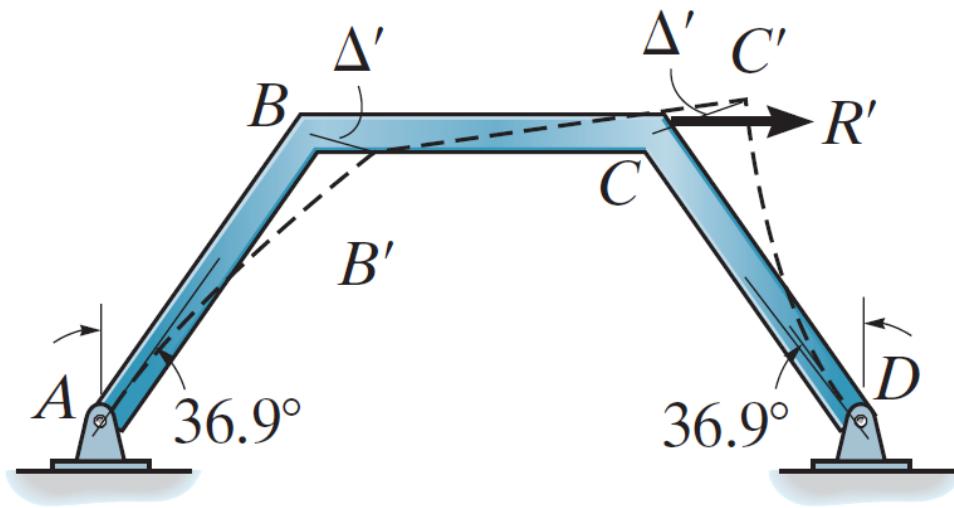
$$\sum F_x = 0;$$

$$R = 3.75 - 3.75 + 20 = 20 \text{ k}$$



روش پخش لنگر

قاب یک درجه آزادی با اعضای مایل



$$(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -3EI\Delta'/(10)^2, \quad (FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 6EI(1.2\Delta')/(10)^2.$$

$$(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -100k.ft$$

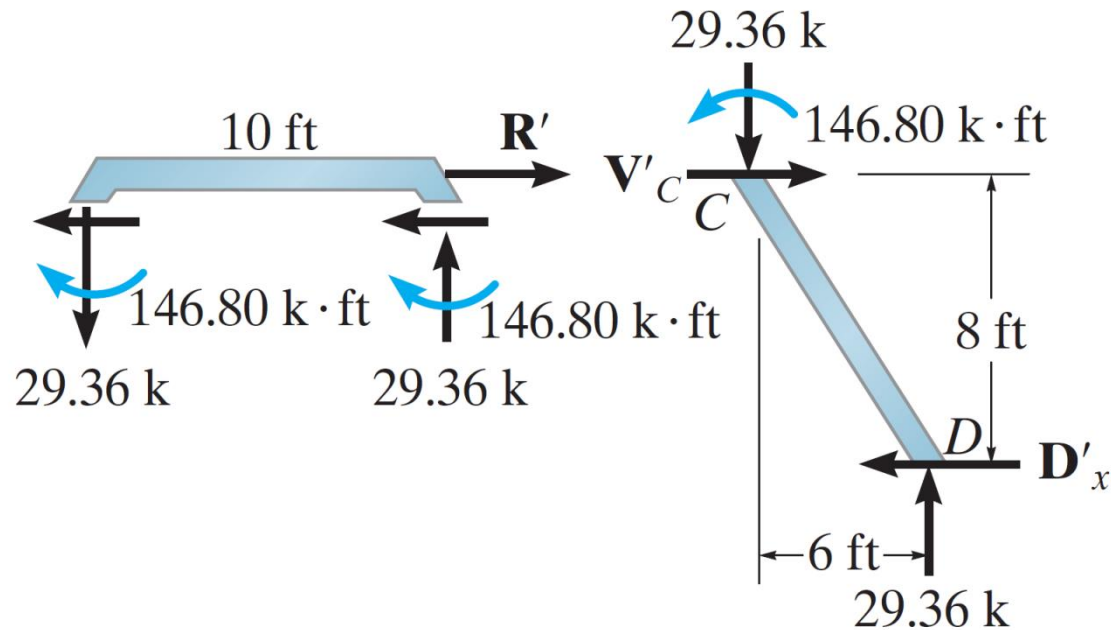
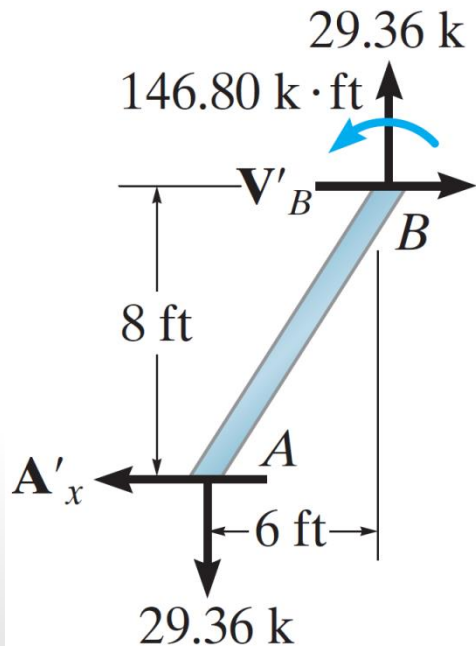
$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 240k.ft$$

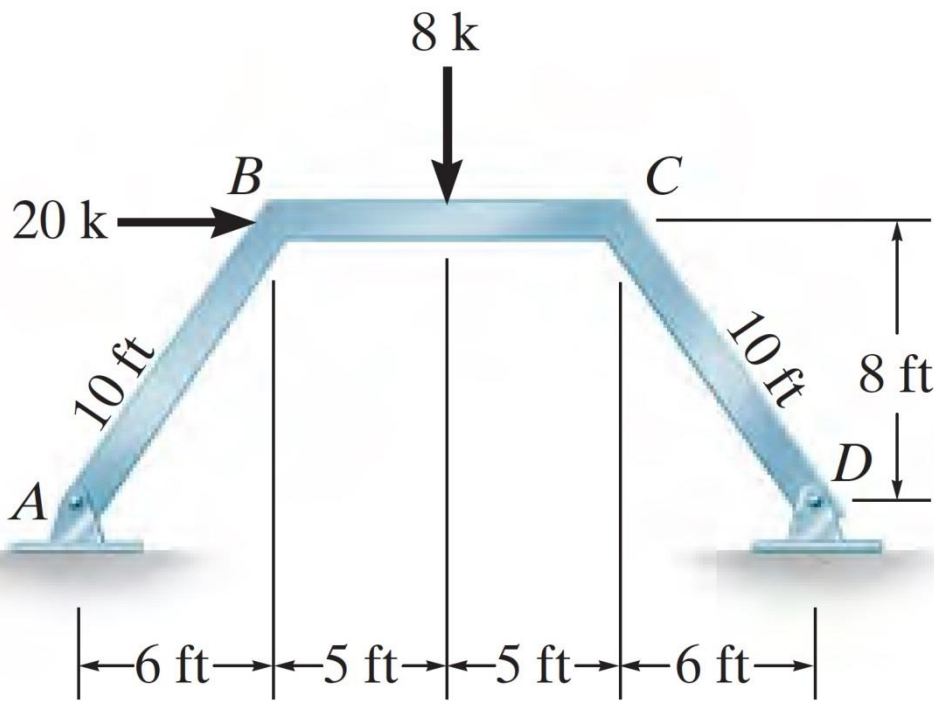
قاب یک درجه آزادی با اعضای مایل

Joint	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>
Member	<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>	<i>CD</i>	<i>DC</i>
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM Dist.		-100 -60.06	240 -79.94	240 -79.94	-100 -60.06	
CO Dist.		17.15	-39.97 22.82	-39.97 22.82	17.15	
CO Dist.		-4.89	11.41 -6.52	11.41 -6.52	-4.89	
CO Dist.		1.40	-3.26 1.86	-3.26 1.86	1.40	
CO Dist.		-0.40	0.93 -0.53	0.93 -0.53	-0.40	
ΣM	0	-146.80	146.80	146.80	-146.80	0

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_B = 0; & \quad -A'_x(8) + 29.36(6) + 146.80 = 0 & \quad A'_x = 40.37 \text{ k} \\ \downarrow + \sum M_C = 0; & \quad -D'_x(8) + 29.36(6) + 146.80 = 0 & \quad D'_x = 40.37 \text{ k} \end{aligned}$$

$$\sum F_x = 0; \quad R' = 40.37 + 40.37 = 80.74 \text{ k}$$





$$M_{BA} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -30.4 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

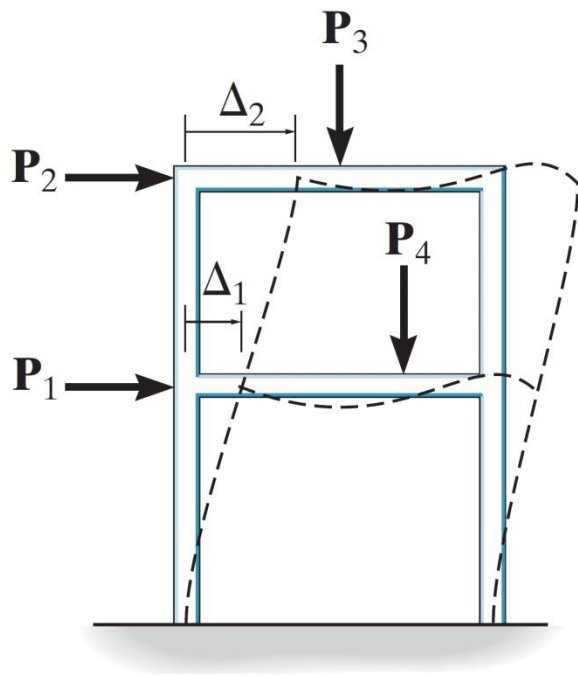
$$M_{BC} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 30.4 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$M_{CB} = 5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(146.80) = 42.3 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$M_{CD} = -5.97 + \left(\frac{20}{80.74}\right)(-146.80) = -42.3 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

روش پخش لنگر

کاربرد روش پخش لنگر برای
قاب های دارای چندین درجه آزادی



$$R_1^\circ + a_1 R_1' + a_2 R_1'' = 0$$

$$R_2^\circ + a_1 R_2' + a_2 R_2'' = 0$$

$$M = M^\circ + a_1 M' + a_2 M'' = 0$$

